第 4 节 高考中抛物线常用的二级结论（★★☆）

强化训练

1．（2020·新高考Ⅰ卷·★★）斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线$C: y^2=4x$的焦点，且与C交于A，B两点，则$|AB|=$_____.

答案：$\dfrac{16}{3}$

解法 1：直线AB过焦点且已知斜率，可写出其方程，与抛物线联立，用坐标版焦点弦公式求$|AB|$，

由题意，$p=2$，抛物线C的焦点为$F(1,0)$，过F且斜率为$\sqrt{3}$的直线为$y=\sqrt{3}(x-1)$，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$消去$y$整理得：$3x^2-10x+3=0$，所以$x_A+x_B=\dfrac{10}{3}$，故$|AB|=x_A+x_B+2=\dfrac{16}{3}$.

解法 2：由斜率能求出倾斜角，故也可用角版焦点弦公式算$|AB|$，

由题意，$p=2$，直线AB的斜率为$\sqrt{3}\Rightarrow$其倾斜角$\alpha=60^\circ$，所以$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{\sin^2 60^\circ}=\dfrac{16}{3}$.

2．（★★）设F为抛物线$C: y^2=3x$的焦点，过F且倾斜角为30°的直线交C于A，B两点，O为原点，则ΔAOB的面积为_____.

答案：$\dfrac{9}{4}$

解析：已知直线的倾斜角，代公式$S=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$即可求$\Delta AOB$的面积，

由题意，$p=\dfrac{3}{2}$，直线AB的倾斜角$\alpha=30^\circ$，所以$S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{2\sin 30^\circ}=\dfrac{9}{4}$.

3．（★★★）过抛物线$y^2=2x$的焦点F作直线交抛物线于A，B两点，若$|AB|=\dfrac{25}{12}$，$|AF|<|BF|$，则$|AF|=$

_____.

答案：$\dfrac{5}{6}$

解法 1：已知$|AB|$，可由角版焦点弦公式求角，再代入焦半径公式算$|AF|$，

不妨设直线AB为如图所示的情形，设$\angle AFO=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，则$|AB|=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}=\dfrac{25}{12}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{5}$，故$|AF|=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{6}$.

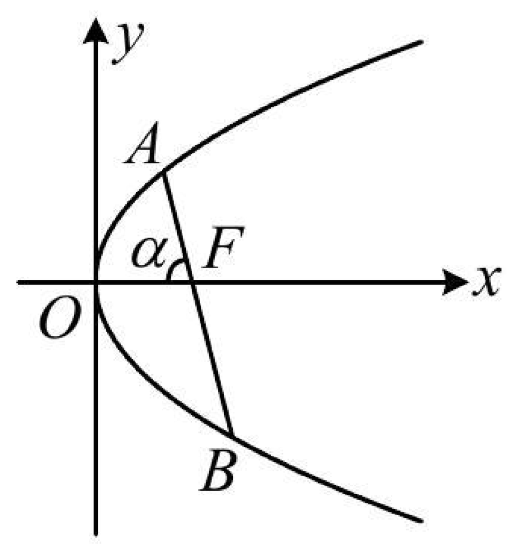
解法 2：$|AB|$可转换成$|AF|+|BF|$，把$|AF|$，$|BF|$看成未知数，结合$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$即可求解$|AF|$，

由题意，$p=1$，所以$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=2$ ①，又$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{25}{12}$ ②，

由①可得$\frac{|AF|+|BF|}{|AF|\cdot|BF|}=2$，结合式②可得$|AF|\cdot|BF|=\frac{25}{24}$ ③，

由②③知$|AF|$，$|BF|$是一元二次方程$x^2-\frac{25}{12}x+\frac{25}{24}=0$的两根，解得：$x=\frac{5}{6}$或$\frac{5}{4}$，

因为$|AF|<|BF|$，所以$|AF|=\frac{5}{6}$.



4.（★★★）过抛物线$C:y^2=3x$的焦点F的直线与C交于A，B两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|=$_____.

答案：$\frac{27}{8}$

解法1：由$|AF|=2|BF|$可用角版焦半径公式建立方程求角，从而求得$|AB|$，

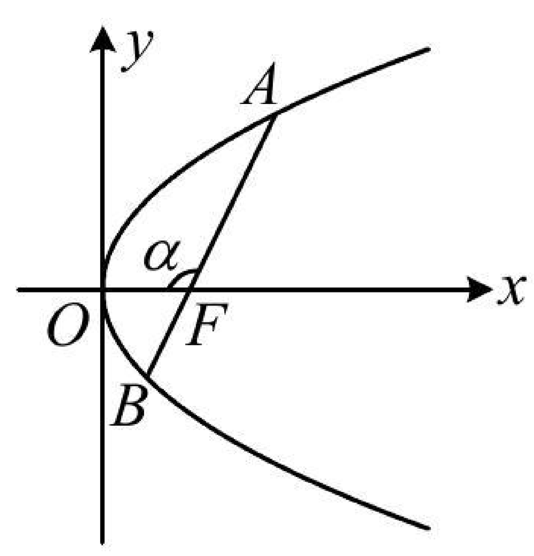
如图，设$\angle AFO=\alpha$，则$|AF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，

因为$|AF|=2|BF|$，所以$\frac{p}{1+\cos\alpha}=2\cdot\frac{p}{1-\cos\alpha}$，从而$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，故$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{2p}{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{1-(-\frac{1}{3})^2}=\frac{27}{8}$.

解法2：由$|AF|=2|BF|$结合$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$也可求出$|AF|$和$|BF|$，进而求得$|AB|$，

由题意，$p=\frac{3}{2}$，所以$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=\frac{4}{3}$，结合$|AF|=2|BF|$可得$|AF|=\frac{9}{4}$，$|BF|=\frac{9}{8}$，

所以$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{27}{8}$.



5.（2023•广东模拟•★★★）已知抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，过F的直线与E交于A，B两点，且$|AF|=3|BF|$，则ΔAOB的面积为（　　）

（A）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）$4\sqrt{3}$　（D）$8\sqrt{3}$

答案：A

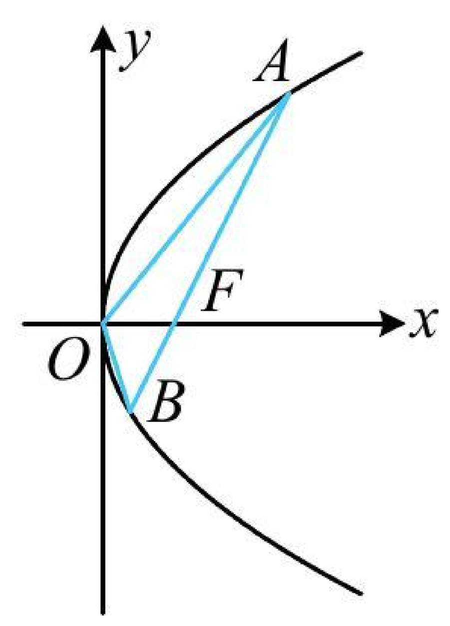
解析：题干给了 $|AF|=3|BF|$，可用角版焦半径公式翻译它，求出角，并用角来计算 $S_{\Delta AOB}$，

如图，设 $\angle AFO=\alpha$，则 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，

因为 $|AF|=3|BF|$，所以 $\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=3\cdot\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，

解得：$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，结合 $0<\alpha<\pi$ 可得 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{4}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



6．（★★★）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 作倾斜角为 120° 的直线与准线 l 相交于点 A，线段 AF 与 C 相交于点 B，且 $|AB|=\dfrac{4}{3}$，则 C 的方程为_____.

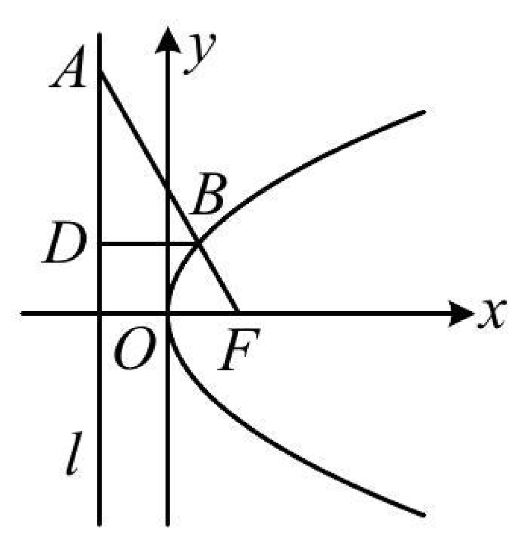
答案：$y^2=2x$

解析：如图，过 B 作 $BD\perp l$ 于 D，因为直线 AF 的倾斜角为 120°，所以 $\angle AFO=\angle ABD=60^{\circ}$，

已知 $|AB|=\dfrac{4}{3}$，可在 ΔABD 中求 $|BD|$，结合抛物线定义得出 $|BF|$，再由角版焦半径公式建立方程求 p，

从而 $|BD|=|AB|\cos\angle ABD=\dfrac{2}{3}$，由抛物线定义，$|BF|=|BD|=\dfrac{2}{3}$，

又 $|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\angle BFO}=\dfrac{p}{1+\cos 60^{\circ}}=\dfrac{2p}{3}$，所以 $\dfrac{2p}{3}=\dfrac{2}{3}$，解得：$p=1$，故 C 的方程为 $y^2=2x$.



7．（★★★★）已知 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 45° 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 M，则 $\dfrac{4p}{|FM|}=$_____.

答案：2

解法 1：涉及中垂线，可先把直线 l 与抛物线联立，结合韦达定理求出 AB 中点，写出中垂线的方程，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，直线 AB 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，即 $x=y+\frac{p}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将 $x=y+\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 消去 x 整理得：$y^2-2py-p^2=0$，判别式 $\Delta=(-2p)^2-4\times1\times(-p^2)=8p^2>0$，

由韦达定理，$y_1+y_2=2p$，所以 $x_1+x_2=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=y_1+y_2+p=3p$，故 AB 中点 G 为 $(\frac{3p}{2},p)$，

所以 AB 中垂线的方程为 $y-p=-(x-\frac{3p}{2})$ ①，由此中垂线可求 M 的坐标，进而求得 $|FM|$，

在①中令 $y=0$ 得：$x=\frac{5p}{2}$，故 $M(\frac{5p}{2},0)$，所以 $|FM|=\frac{5p}{2}-\frac{p}{2}=2p$，故 $\frac{4p}{|FM|}=2$.

解法 2：如图，要求 $|FM|$，结合 $\angle GFM$ 是已知的，可先求 $|FG|$，

因为 G 为 AB 中点，所以 $|FG|=|AF|-|AG|=|AF|-\frac{1}{2}|AB|$ ①，

已知 l 的倾斜角，可用角版焦半径和焦点弦公式来算 $|AF|$ 和 $|AB|$，

直线 l 的倾斜角为 $45^{\circ}\Rightarrow\angle GFM=45^{\circ}\Rightarrow\angle AFO=135^{\circ}$，所以 $|AF|=\frac{p}{1+\cos135^{\circ}}$，$|AB|=\frac{2p}{\sin^2135^{\circ}}$，

代入①得：$|FG|=\frac{p}{1+\cos135^{\circ}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{\sin^2135^{\circ}}=\sqrt{2}p$，

又 $\angle GFM=45^{\circ}$，所以 ΔGFM 是等腰直角三角形，从而 $|FM|=\sqrt{2}|FG|=2p$，故 $\frac{4p}{|FM|}=2$.